Задание № 6 Системы линейных уравнений

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**Решение однородной системы. Фундаментальная система решений**

Система называется *однородной*, если матрица-столбец свободных коэффициентов является нулевой.

В матричной форме однородная система имеет вид .

Однородная система всегда совместна, т.к. она всегда имеет тривиальное решение .

Если в системе линейных уравнений  число уравнений больше числа неизвестных, то система имеет бесконечно много нетривиальных решений.

Среди бесконечного множества решений можно выделить конечное число *линейно независимых* решений, которые в совокупности образуют *фундаментальную систему решений*.

Вопрос об общем количестве фундаментальных решений позволяет решать следующая теорема:

Если ранг матрицы коэффициентов однородной системы меньше числа неизвестных , то эта система уравнений имеет фундаментальную систему из  решений.

Если фундаментальная система решений известна, то общее решение однородной системы можно представить в виде линейной комбинации фундаментальных решений:

,

где - произвольные постоянные,  - фундаментальные решения системы.

Для нахождения фундаментальных решений однородной системы используют следующий алгоритм:

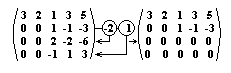
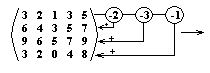
Пусть дана однородная система, содержащая  неизвестных и  уравнений.

1. По заданной системе выписываем матрицу коэффициентов, приводим матрицу к ступенчатому виду и определяем ее ранг ;
2. При  по ступенчатой матрице записываем эквивалентную систему;
3. Выбираем базисные и свободные неизвестные. Выбор этих неизвестных неоднозначен; однозначным является лишь количество базисных неизвестных, оно равно рангу матрицы . Определитель, составленный из коэффициентов при базисных неизвестных не должен быть равен нулю;
4. После выбора базисных неизвестных их выражают через свободные неизвестные, используя эквивалентную систему уравнений;
5. Находим фундаментальные решения по эквивалентной системе уравнений, поочередно задавая одной свободной неизвестной единичное значение, а остальным свободным неизвестным – нулевые значения;
6. Записываем общее решение однородной системы через фундаментальные решения с заменой свободных неизвестных на произвольные постоянные;

***Пример 1:*** найти общее решение однородной системы и выразить его через фундаментальную систему решений

;

*Решение:* 1. Приводим матрицу коэффициентов к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования.

****

Ранг матрицы равен 2.

2. Выписываем по ступенчатой матрице эквивалентную систему уравнений: ;

3. Ранг , поэтому выбираем две базисных неизвестных. Неизвестные  и  нельзя использовать в качестве базисных, т.к. определитель при этих неизвестных равен нулю .

Выберем в качестве базисных неизвестных  и . Тогда свободными неизвестными будут , .

4. Выражаем базисные неизвестные через свободные, используя эквивалентную систему.

;

5. Находим фундаментальные решения системы, соответствующие свободным неизвестным:

при , , получаем ;

при , , получаем ;

при , , получаем ;

6. Записываем общее решение системы, используя фундаментальные решения:

, или

,

где  - произвольные постоянные.

*Проверка*: примем, например, , тогда получим частное решение

;

Подставляем найденные корни  в одно из уравнений, не входящее в эквивалентную систему: , убеждаемся в правильности решения.

*Пример2:* Найти фундаментальную систему решений системы уравнений



и ее общее решение

*Решение:* Методом, изложенным выше, переходим к системе . Полагая , получим систему , решив которую, найдем , поэтому, первым вектором фундаментальной системы решений будет вектор

.

Полагая , получим систему , которая имеет решение  и второй, последний, вектор фундаментальной системы решений: .

Общее решение системы уравнений можно представить в виде

, где  - произвольные числа.

**Определение совместности системы**

Рассмотрим систему линейных уравнений, в которой количество уравнений может не совпадать с количеством неизвестных.



Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется несовместной.

*Замечание:* Ранг матрицы  меньше

либо равен рангу матрицы . Матрицу  называют расширенной матрицей системы линейных уравнений.

Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы  системы равен рангу расширенной матрицы системы.

Из теоремы Кронекера-Капелли следует:

1. Если ранги матрицы и расширенной матрицы равны между собой и равны числу неизвестных, то система имеет единственное решение;
2. Если ранги матрицы и расширенной матрицы равны между собой, но меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечно много решений;
3. Если ранги матрицы и расширенной матрицы не равны, то система не имеет решений;

*Пример:* Определить, является ли совместной система

;

если система совместна, то решить ее.

*Решение*: Составим расширенную матрицу и будем приводить ее к ступенчатому виду. Для проверки правильности вычислений используем контрольный столбец

; ;;

; ;;

Ранг матрицы  равен двум, а ранг матрицы  равен трем, значит, система несовместна.

**Решение неоднородных систем**

Неоднородная система в матричной форме имеет вид . В случае совместной системы ее общее решение можно представить в виде , где  - общее вешение соответствующей однородной системы ,  - частное решение неоднородной системы.

Базисным решением неоднородной системы называется ее частное решение, в котором все свободные неизвестные приняты равными нулю.

**Пример:** найти общее решение неоднородной системы в виде суммы базисного и фундаментального решений

;

*Решение:* приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

; ; ;

Ранги матрицы и расширенной матрицы совпали, следовательно, система имеет решения. Исходная система равносильна следующей:

;

Рассмотрим соответствующую однородную систему:

;

Используя рассмотренный ранее алгоритм, найдем фундаментальную систему решений однородной системы. В качестве базисных неизвестных выберем ; выразим базисные неизвестные через свободные:

;

, ;

Тогда общее решение однородной системы имеет вид .

Находим базисное решение неоднородной системы, полагая  в системе :

;

Из системы находим , значит,  и

.

**Самостоятельная работа:**

**2.6.1.** Для данных систем линейных однородных уравнений найти фундаментальные системы решений и общие решения. Указать какие-либо частные решения.

а)  ; б) ; в) 

**2.6.2.** Для данных систем линейных однородных уравнений найти фундаментальные системы решений и общие решения. Указать какие-либо частные решения.

а) ; б) 

**2.7.1.** Исследовать совместность и найти общее решение систем уравнений.

а) ; б) ;

в) ; г) ;

**Ответы:**

**2.6.1.**а) Ранг матрицы системы равен 1. Если принять переменные  и  за свободные неизвестные, то фундаментальная система решений состоит из векторов  и . Общее решение имеет вид , где  - произвольные коэффициенты.

б) Ранг матрицы системы равен 2. Если принять переменную  за свободную неизвестную, то фундаментальная система решений состоит из единственного вектора . Общее решение имеет вид , где  - произвольный коэффициент;

в) СЛАУ имеет единственное решение . Фундаментальной системы решений нет.

**2.6.2.** а) Ранг системы равен 2. Если принять переменные  за свободные неизвестные, то фундаментальная система решений будет состоять из векторов ,  и , а общее решение имеет вид , где  - произвольные коэффициенты;

б) Ранг системы равен 1. Если принять переменные  за свободные неизвестные, то фундаментальная система решений будет состоять из векторов , ,  и  а общее решение имеет вид , где  - произвольные коэффициенты;

**2.7.1.** а) ; б) ;

в) система несовместна; г) ;